受験番号	MC－

1

質量M，半径Rの剛体円板に糸の一端を固定して，円板周囲にゆるみのないように巻きつける．剛体円板の中心の座標をx，重力加速度の大きさをgとして，剛体円板の運動を考える．ただし，剛体円盤の水平方向の並進運動，剛体円板の厚さ，空気抵抗，糸の太さ・伸び，剛体円板と糸のすべりは無視できるものとする．また，剛体円板の動径方向rの質量分布を$\rho(r)$とすると，厚さの無視できる剛体円板の中心まわりの慣性モーメントIは，

$$I = 2\pi \int \rho(r) r^3 dr \quad \cdots\cdots \text{（1）}$$

で与えられる．

〔1〕　はじめに，図1－1のように，鉛直下向きを正としてx軸をとり，糸のもう一端を天井に固定して剛体円板を静かに降下させる運動について考える．以下の問いに答えよ．

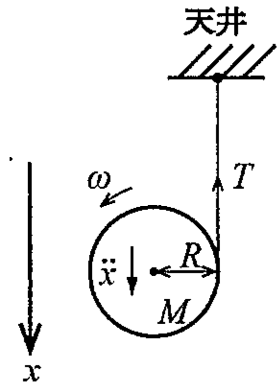

図1－1

（1－1）反時計回りの回転方向を正とした場合の剛体円板の回転角速度をω，糸に作用する張力をT，剛体円板の中心まわりの慣性モーメントをIとした場合，剛体円板の中心並進運動と回転運動に対する運動方程式をそれぞれ表せ．

（1－2）剛体円板の中心並進運動の加速度$\ddot{x}$と回転運動の角加速度$\dot{\omega}$の関係を示せ．

（1－3）降下する剛体円板の中心並進運動の加速度$\ddot{x}$を，M，R，I，gを用いて表せ．

（1－4）降下中の剛体円板において力学的エネルギーが保存されることを説明せよ．

（1－5）質量M，半径Rの質量分布が一様な剛体円板の中心まわりの慣性モーメントI_0を求めよ．また，慣性モーメントの式（1）を用いて，答えを導く過程を示せ．

（1－6）剛体円板の全質量Mは変えずに慣性モーメントIを$I<I_0$とすると，剛体円板の中心並進運動の加速度はどのように変化するか，理由とともに答えよ．

〔2〕　つぎに，図1－2のように，剛体円板に巻きつけた糸のもう一端を滑らかな水平丸ピンにかけ，糸の端に質量 m の物体を吊るして静かに離す場合を考える．剛体円板の回転角速度を ω，剛体円板の中心の加速度を α，物体の加速度を β，糸に作用する張力を T として，以下の問いに答えよ．ただし，角速度 ω および加速度 α，β については図1－2の矢印の向きを正とする．

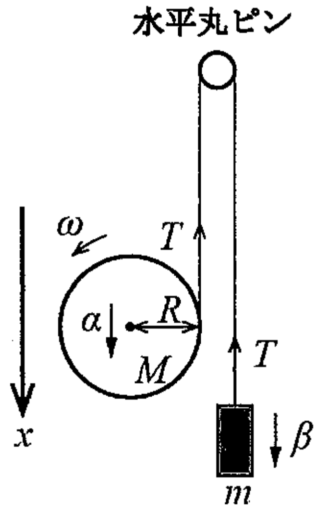

図1－2

（2－1）物体の運動方程式を，物体の質量 m，糸に作用する張力 T，重力加速度 g を用いて表せ．

（2－2）剛体円板の中心の加速度 α および物体の加速度 β と回転運動の角加速度 $\dot{\omega}$ の関係を示せ．

（2－3）質量 M，半径 R の質量分布が一様な剛体円板の中心の加速度 α が $\frac{1}{2}g$ となるように降下させたい．物体の質量 m をどのような値にすればよいか，理由とともに答えよ．

受験番号	MC－

2

導体を誘電率ε_0の真空中に置いた．このとき以下の問いに答えよ．ただし，無限遠の静電ポテンシャルを0とする．

〔1〕 図2―1のように，$x=0$のyz平面上に無限に広い平面を持つ半無限の帯電していない導体を$x \leq 0$に置き，点$\mathrm{R}(r,0,0)$（ただし$r>0$）に正の点電荷q（$q>0$）を置いた．$x>0$の空間は真空である．導体に誘起される電荷を鏡像法を用いて以下のとおり考える．

（1―1）この導体の代わりに仮想的な鏡像電荷$-q$を点$\mathrm{R}'(-r,0,0)$に置く．点$\mathrm{P}(x,y,z)$（ただし$x>0$）における電場ベクトル$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\left(E_x(x,y,z),E_y(x,y,z),E_z(x,y,z)\right)$を求めよ．

（1―2）問い（1―1）の場合の点Pにおける静電ポテンシャル$\varphi(x,y,z)$を求めよ．

（1―3）問い（1―1）および（1―2）の電場と静電ポテンシャルが，①$x=0$の電場がこの面に垂直であり，②$x=0$の面の静電ポテンシャルが一定であるという導体の 2 つの境界条件を満たしていることを示せ．

（1―4）点Rにおける電荷qによって，導体表面に誘起される電荷の面密度$\sigma(y,z)$を求めよ．また答えを導く過程も示せ．

（1―5）導体表面に誘起された全電荷Qを求めよ．また答えを導く過程も示せ．

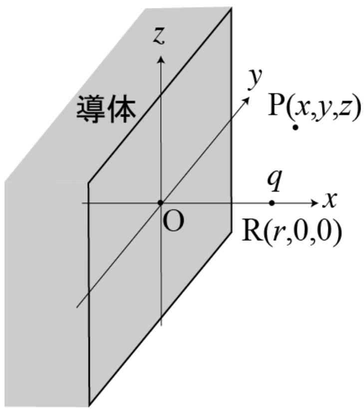

図2―1

整理番号	2022 年度 4 月入学（2021 年度 10 月入学含む）東京農工大学工学府博士前期課程	物理システム工学
8	問　題　用　紙　　　物　理	専攻

受験番号	MC－

〔２〕 真空中の原点Oに，中心が一致するように半径aの導体球を置く．この導体球に正の電荷q（$q>0$）を与える．

（２―１）球の中心から距離rの点における電場の大きさEを求めよ．

（２―２）球の中心から距離rの点における静電ポテンシャルφを求めよ．

（２―３）導体球の静電エネルギーUと電気容量Cを求めよ．静電エネルギーUは答えを導く過程も示せ．

〔３〕 問い〔２〕において，図２―２のように，中心Oからx軸に沿って距離$r(r>a)$の点R$(r,0,0)$に正の点電荷q（$q>0$）を置いた．

（３―１）導体球を接地した場合を考える．導体球表面とx軸との交点C_1，C_2に着目して，問い〔１〕（１―３）に示した導体球表面における境界条件を満たすような，$\mathrm{OC_1}$間に配置する鏡像電荷q'のx座標と符号を含む電気量を求めよ．また答えを導く過程も示せ．このとき，点電荷qにはたらくクーロン力のx成分F_xをε_0, q, r, aを用いて求めよ．

（３―２）導体球の接地をやめた場合を考える．導体球に正の電荷q（$q>0$）が存在するときの鏡像電荷q''は，問い（３―１）で求めた鏡像電荷q'にどのような鏡像電荷を加えればいいか，鏡像電荷q''の位置と符号を含む電気量を求めよ．また答えを導く過程も示せ．このとき，点電荷qにはたらくクーロン力のx成分F'_xをε_0, q, r, aを用いて求めよ．

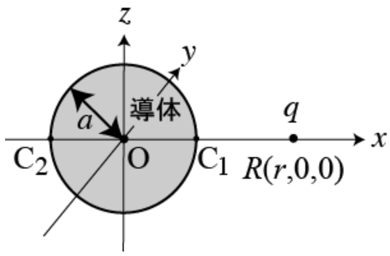

図２―２

受験番号	MC−

3

気体原子の固体表面への吸着について，以下の問い〔1〕〔2〕の流れに従って考える．ボルツマン定数をk_B，プランク定数をhとする．

〔1〕質量mを持つN個の同種原子が，一辺の長さLの十分大きい箱の中に閉じ込められているとして，単原子理想気体の熱力学関数を導出する．Nは十分大きいとする．気体の温度はTである．以下の文章の空欄にあてはまる文字式を答えよ．

波数ベクトルのx, y, z成分k_x, k_y, k_zで指定される状態の原子のエネルギーは$\frac{h^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)}{8\pi^2 m}$である．ただし，それぞれの波数成分に次の境界条件が課される．

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L} \quad (n_x\text{は正の整数})\text{；}\quad y, z\text{成分についても同様}$$

このとき，1個の原子のx方向の運動に関する分配関数をZ_xとすると，$Z_x =$ $\boxed{(1-1)}$ と計算される．ここで，n_xに関する和は，$\sum_{n_x=1}^{\infty} f(n_x) \to \int_0^{\infty} f(x)dx$のように積分に置き換えて計算した．また，ガウス積分の公式$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$（ただし$a > 0$）を使った．同様に，1個の原子の$y, z$方向の運動に関する分配関数$Z_y, Z_z$も計算できる．そして，$N$個の原子からなる気体の分配関数$Z$は，原子が区別できないことを考慮して，$Z_x, Z_y, Z_z$と$N$を用いて$Z =$ $\boxed{(1-2)}$ と書ける．気体のヘルムホルツの自由エネルギーFは，Zを用いて$F =$ $\boxed{(1-3)}$ と表せる．よって，Fは次のように求まる．

$$F = k_B T N\left(-1 + \ln\left(\frac{N}{L^3}\left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right).$$

ただし，Nが十分大きいときに使える近似式$\ln N! \simeq N\ln N - N$を使った．$\ln$は自然対数を表す．このFを用いて気体の化学ポテンシャル$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,L}$を求め，$N, L$に依存しないで気体の圧力$p$に依存する形で表すと，$\mu =$ $\boxed{(1-4)}$ である．

受験番号	MC－

〔2〕固体表面に原子が 1 個ずつ入ることができる吸着点がM_0個あり，1 つの吸着点に入った原子のエネルギーは$-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$である．その表面が問い〔1〕で求めた化学ポテンシャルをもつ気体と接触して熱平衡である場合を考える．ただしM_0は十分大きいとし，また，気体は吸着点の数に対して十分大きな原子数をもつ粒子源とみなせるとする．この固体表面に吸着した原子について考える．

（2−1） M_0個の吸着点のうちM個（ただし$M < M_0$）に原子が吸着した状態を考える（図3−1では$M_0 = 6, M = 2$として描いている）．この原子がM個吸着するしかたは何通りあるか，その状態数（場合の数）C_Mを求めよ．また，吸着したM個の原子全体のエネルギーE_Mを求めよ．

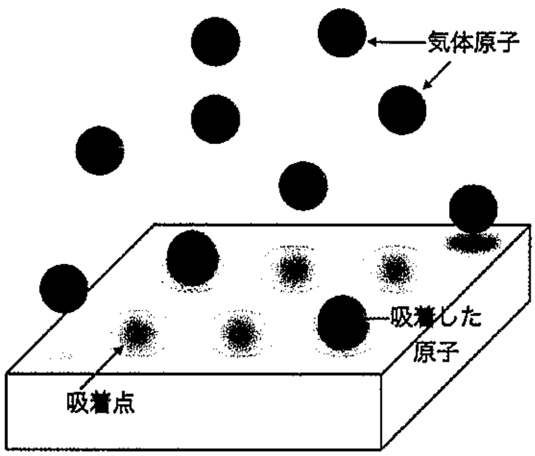

図3−1

受験番号	MC－

（2－2）問い（2－1）の状態をとる確率は，グランドカノニカル分布に従い，次の式に比例する．

$$C_M \exp\left(-\frac{E_M - \mu_a M}{k_B T}\right).$$

ただしμ_aは吸着原子の化学ポテンシャルである．このとき，表面の吸着点の被覆率$\theta = \langle M\rangle/M_0$が以下の式で表されることを示せ．ここで$\langle M\rangle$は吸着原子数の熱平均である．

$$\theta = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{\varepsilon+\mu_a}{k_B T}\right)}.$$

（2－3）この被覆率θの表式は，ある1つの量子状態を占める電子の数の熱平均を表すフェルミ-ディラックの分布関数と同じ関数形をしている．その理由を述べよ．

（2－4）被覆率θを気体の圧力pの関数として求めよ．答えを導く過程も示せ．

（2－5）問い（2－4）で求めた関数を，被覆率θを縦軸，圧力pを横軸としてグラフに描け．被覆率が1/2になる圧力の値を明示すること．

4

電子が１次元のある長さの領域に閉じ込められて量子化されている状態を，１次元調和振動子として取り扱うことにする．そのため，電子に対するハミルトニアンを

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

と表す．ここで，m は電子の質量，$\hat{x}$ は位置の演算子，$\hat{p}$ は運動量の演算子，ω は角振動数，hはプランク定数，$\hbar = h/(2\pi)$とする．また，$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$ を消滅演算子（下降演算子），$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$ を生成演算子（上昇演算子）とよぶ．さらに，$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を個数演算子，個数演算子$\hat{N}$ に対する固有ケットを$|n\rangle$，固有値を n（$n = 0, 1, 2, \ldots$）とする．ただし，$|n\rangle$は規格化されているものとする．

〔１〕以下の設問に答えよ．

（１－１）$\hat{x}$と$\hat{p}$は正準交換関係$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$を満たすこととして，交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ．

（１－２）固有ケット$|n\rangle$に個数演算子$\hat{N}$を作用させると固有値nが求められる（すなわち，$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$）．$n \geqq 1$ のとき，$\hat{a}|n\rangle$を固有ケットとする$\hat{N}$の固有値が $n-1$ となることを示せ．

（１－３） $n \geqq 1$ のとき，$\hat{a}|n\rangle$を固有ケットとする$\hat{N}$の固有値が $n-1$ であることから，$\hat{a}|n\rangle = c|n-1\rangle$と表せる．$c = \sqrt{n}$ としてよいことを示せ．ここで，$\langle n|\hat{a}^\dagger = c^*\langle n-1|$の関係を使ってよい．

〔2〕電子は位置と運動量が同時に確定する状態が存在しない．そこで，コヒーレント状態とよばれる最小の不確定性を持つ状態について考えてみる．$|\alpha\rangle$をコヒーレント状態と定義し，

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

で表す．ここで，αは複素数である．以下の設問に答えよ．

（２－１）$\hat{x}$と$\hat{p}$を，m，ω，$\hbar$，$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$の中から必要な文字を使用して表せ．

（２－２）$|\alpha\rangle$が $\hat{a}$に対する固有ケットになっていること，および，固有値がαであることを示せ．

（２－３）電子の運動量の期待値$\langle p\rangle$を求めよ．$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$の関係を使ってよい．

（２－４）電子の運動量のばらつき$\langle\Delta p\rangle = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$を求めよ．

（２－５）問い（２－４）の結果を用い，$|\alpha\rangle$が最小の不確定状態（$\langle\Delta p\rangle\cdot\langle\Delta x\rangle = \hbar/2$）であることを示せ．